O związkach dwuliniowych

między stałemi całek

rozwiązań pewnych równań różniczkowych rzędu 2-go.

Napisał

Stanisław Kępiński.

§. 1.

Wiadomo, że w teoryi całek Abelowych istnieją dwa sposoby otrzymywania związków dwuliniowych między peryodami tychże funkcyj. Jeden z nich opiera się na własnościach całek Abelowych gatunku trzeciego, drugi — podany przez Riemanna — polega na rozważaniu całki [1])

$$\int j_i \, dj_k,$$

utworzonej przy pomocy całek Abelowych j_i, j_k, wzdłuż torów obejmujących wszystkie punkty osobliwe.

Kierując się analogią, można uzyskać związki dwuliniowe między stałemi całkowania dla całek rozwiązań pewnych równań różniczkowych liniowych, jednorodnych, rzędu 2-go [2]).

---

[1]) Por. np. Briot et Bouquet: Théorie des functions elliptiques, Paris, 1875; str. 674 i n.

[2]) Na tego rodzaju badania tych całek zwrócił moją uwagę prof. Klein w Getyndze. Zajmował się niemi przy pomocy odmiennej metody pr. Fuchs w pracach: „Über Relationen, welche etc." Crelle's J. t. 76, p. 177. i „Über Relationen, welche...." Sitzungsberichte der Akad. der Wissenschaften, Berlin 1892.

Aby rzecz jasno przedstawić, ograniczymy się do równań różniczkowych liniowych, należących do klasy równań badanych przez Fuchsa[1]), posiadających spółczynniki wymierne t. j. do równań kształtu:

$$y''+y'\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1-k_i'-k_i''}{z-e_i}+\frac{y}{\prod\limits_{i=1}^{i=n-1}(z-e_i)}\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{k_i'\,k_i''\,(e_i-e_1)\dots(e_i-e_{n-1})}{z-e_i}+\right.$$

$$\left.+\,k_n'\,k_n''\,z^{n-3}+Az^{n-4}+\dots+N\right]=0, \tag{1}$$

gdzie

$$k_n'+k_n''+\sum_{i=1}^{i=n-1}(k_i'+k_i'')=n-1. \tag{2}$$

Tu, jak wiadomo, oznaczają k_i', k_i'' wykładniki, należące do punktów osobliwych e_i, w odległości skończonej się znajdujących, zaś k_n', k_n'' wykładniki, należące do punktu osobliwego $e_n=\infty$.

O tych wykładnikach zakładamy, że:

a) k_i', k_i'' są od siebie różne i większe od -1,

b) k_n', k_n'' są od siebie różne i większe od $+1$,

c) jeżeli różnica $k_i'-k_i''$ albo $k_n'-k_n''$ jest liczbą całkowitą, to w rozwinięciach rozwiązań y_1, y_2 równania (1) na szeregi nie występują logarytmy.

d) Suma wykładników: $k_i'+k_i''$, $k_n'+k_n''$ jest liczbą całkowitą.

Ostatnie to założenie ma następujące znaczenie dla grupy Γ równania (1).

Niech funkcye y_1, y_2 ulegają podstawieniu „rodzącemu“:

$$A_i)\quad \begin{aligned} y_1' &= \alpha_i y_1+\beta_i y_2 \\ y_2' &= \gamma_i y_1+\delta_i y_2, \end{aligned} \tag{3}$$

które powstaje przy obiegu zmiennej niezależnej z około punktu osobliwego e_i. Wówczas według Fuchs'a[2]) znaleźć można dwa rozwiązania Y_1, Y_2:

$$Y_{1,2}=ay_1+by_2,$$

któreby przy obiegu zmiennej z około punktu e_i ulegały podstawieniom:

$$Y_1'=\rho_1\,Y_1,\quad Y_2'=\rho_2\,Y_2.$$

---

[1]) Crelle's Journal t. 66. Zob. również moją pracę: O całkach rozwiązań równań różniczkowych i t. d. (Rozpr. Akad. Umiej. w Krakowie, serya II. t. V.), w której (roz. 1.) własności takich równań są wyłożone.

[2]) Por. Fuchsa pracę l. c.

„Czynniki“ ρ_i', ρ_i'' otrzymuje się z równania kwadratowego:

(4)
$$\begin{vmatrix} \alpha_i-\rho_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i-\rho_i \end{vmatrix}=0.$$

Z drugiej strony, rozważając zachowanie się szeregów Y_1, Y_2 przy obiegu zmiennej około e_i, dostrzeżemy, że ρ_i', ρ_i'' mają kształt:

(5)
$$\rho_i'=e^{2\pi i k'_i}, \quad \rho_i''=e^{2\pi i k''_i}.$$

Stąd okazuje się, że wyznacznik podstawienia (3)

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{vmatrix}=e^{2\pi i(k'_i+k''_i)}$$

wskutek warunku *d*) równy jest *1*. Ponieważ, (stosownie do tegoż warunku *d*), wszystkie podstawienia „rodzące“ posiadają wyznaczniki równe jedności, przeto każde podstawienie grupy Γ ma wyznacznik równy jedności.

§. 2.

Zachowując oznaczenia, przyjęte w powyżej wspomnianej pracy: „O całkach rozwiązań równań różniczkowych itd.“, oznaczać będę także i tu całki rozwiązań równania (1) przez j_1, j_2:

(6)
$$j_1=\int_{\delta_1}^{z} y_1\,dz, \quad j_2=\int_{\delta_2}^{z} y_2\,dz,$$

zaś stałe całkowania, otrzymywane przy obiegach zmiennej z około punktów osobliwych e_i, $e_n=\infty$ odpowiednio przez p_i, q_i; p, q. Całki te (6) przy obiegach z około e_i ulegają podstawieniom:

$$A_i)\quad \begin{aligned} j'_1 &= \alpha_i j_1+\beta_i j_2+p_i \\ j'_2 &= \gamma_i j_1+\delta_i j_2+q_i. \end{aligned}$$

Między temi stałemi istnieją przy pewnych założeniach, tyczących się równania (1), związki liniowe, wyprowadzone w przytoczonej rozprawie (Roz. II, §. 4) [1]).

[1]) We wysłowieniu twierdzenia, tyczącego się owych związków liniowych, zaszła l. c. (str. 298) pewna niedokładność; zdanie: „równania (21) określają stosunek stałych p_i i q_i, należących do podstawienia eliptycznego“, uzupełnić należy słowami „pod warunkiem, że spółczynniki tegoż równania: $\sum_1^{e_i} a_{\nu-1}$, $\sum_1^{e_i} b_{\nu-1}$, $\sum_1^{e_i} c_{\nu-1}$, $\sum_1^{e_i} d_{\nu-1}$ nie są tożsamościowo równe zeru“. Istotnie, jeżeli spółczynniki σ_i, tam wprowadzone, mają wartości równe -1, ten przypadek wyjątkowy zachodzi i wówczas naturalnie równania (21) nic nam nie określają.

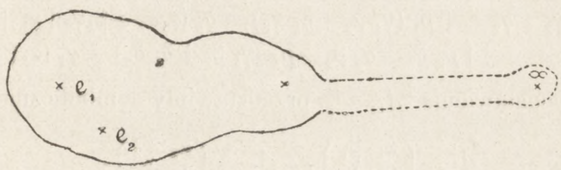
Obecnie będzie nam szło o inne związki, a mianowicie, jak wspomnieliśmy, o związki dwuliniowe. Otrzymamy zaś je w sposób następujący:

Rozważmy całkę:

$$V=\int_{(C)}^{z}(j_1\,dj_2-j_2\,dj_1) \tag{7}$$

wziętą wzdłuż toru C, obejmującego wszystkie punkty osobliwe: e i ∞ (fig. 1).

Fig. 1.

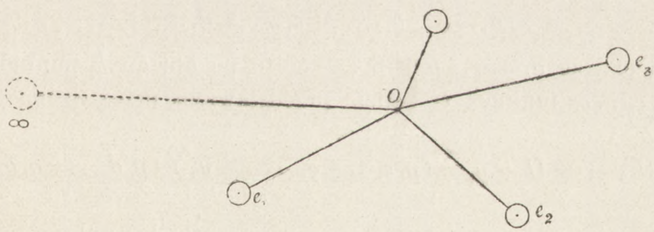


Ponieważ tor ten całkowania można, nie przechodząc przez żaden z punktów osobliwych, ściągnąć do jednego punktu, więc:

całka V wzięta wzdłuż toru C jest równa zeru.

Całkę tę jednak możemy jeszcze w inny sposób przedstawić. Tor całkowania C możemy zastąpić prostemi, poprowadzonemi z punktu O dowolnego, do punktów osobliwych e_i, ∞ i kołami dowolnie małemi otaczającemi owe punkty (fig. 2).

Fig. 2.



Zważmy naprzód, jak się zachowuje na tak zmodyfikowanym torze (C) funkcya

$$U=\frac{dV}{dz}=j_1\,y_2-j_2\,y_1.$$

Nazwijmy punkty, które chcemy kolejno obiegać, odpowiednio: e_1, e_2, ... e_{n-1}, $e_n=\infty$.

Na drodze $O\,e_1$ jest

$$U=j_1\,y_2-j_2\,y_1. \tag{8}$$

Po obiegu około punktu e_1 na prostej $e_1\,O$ funkcya U ma wartość:

$$U_1 = (\alpha_1 j_1 + \beta_1 j_2 + p_1)(\gamma_1 y_1 + \delta_1 y_2) - (\gamma_1 j_1 + \delta_1 j_2 + q_1)(\alpha_1 j_1 + \beta_1 j_2),$$

czyli z uwagi, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$(9) \qquad U_1 = U + (p_1\gamma_1 - q_1\alpha_1) y_1 + (p_1\delta_1 - q_1\beta_1) y_2.$$

Podobnie postępując, znajdziemy wyrażenie U po obiegu około punktów e_1, e_2:

$$U_{12} = U + [p_2\gamma_2 - q_2\alpha_2 + p_1(\gamma_1\alpha_2 + \delta_1\gamma_2) - q_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2)] y_1 +$$
$$+ [p_2\delta_2 - q_2\beta_2 + p_1(\gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2) - q_1(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2)] y_2.$$

Lecz, jeżeli podstawienia A_1, A_2 przedstawimy symbolicznie w kształcie

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

to podstawienie złożone $A_1 A_2$ [1]) wyrazi się zapomocą symbolu:

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2, & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2 \\ \gamma_1\alpha_2 + \delta_1\gamma_2, & \gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2 \end{pmatrix}.$$

Dla krótkości nazwijmy spółczynniki tego podstawienia odpowiednio a_{12}, b_{12}, c_{12}, d_{12}. Wówczas U_{12} wyrazi się przez

$$(10) \quad U_{12} = U + (p_2\gamma_2 - q_2\alpha_2 + p_1 c_{12} - q_1 a_{12}) y_1 + (p_2\delta_2 - q_2\beta_2 + p_1 d_{12} - q_1 b_{12}) y_2.$$

Ogólnie, jeżeli spółczynniki podstawienia złożonego: $A_1 A_2 A_3 \ldots A_k$ nazwiemy odpowiednio:

$$a_{12\ldots k}, \quad b_{12\ldots k}, \quad c_{12\ldots k}, \quad d_{12\ldots k},$$

zastrzegając, że $a_k = \alpha_k$, $b_k = \beta_k$, ..., to po obiegu k punktów osobliwych $e_1, e_2 \ldots e_k$ funkcya U będzie przedstawiona przez wzór:

$$(11) \qquad U_{12\ldots k} = U + y_1 \sum_{i=k}^{i=1} (p_i c_{i\ldots k} - q_i a_{i\ldots k}) + y_2 \sum_{i=k}^{i=1} (p_i d_{i\ldots k} - q_i b_{i\ldots k}).$$

Zauważmy jeszcze, że po obiegu wszystkich punktów osobliwych funkcya U otrzymuje swą pierwotną wartość, że więc:

$$(12) \qquad \sum_{i=n}^{i=1} (p_i c_{i\ldots n} - q_i a_{i\ldots n}) = 0.$$

$$(13) \qquad \sum_{i=n}^{i=1} (p_i d_{i\ldots n} - q_i b_{i\ldots n}) = 0.$$

---

[1]) Iloczyn $A_1 A_2$ należy rozumieć w ten sposób, że się najprzód wykonuje A_1, następnie A_2.

§. 3.

Wiedząc, jak się zachowuje funkcya U przy obiegach, nie trudno nam będzie otrzymać przedstawienie jej całki V wzdłuż toru C.

Zgodnie bowiem z powyższemi założeniami (§. 1.) mamy w okolicy punktu e_i

$$u=(z-e_i)^{k'_i+k''_i}\mathfrak{P}(z-e_i),$$

gdzie

$$k'_i+k''_i+1>0;$$

zaś w okolicy punktu $e_n=\infty$.

$$U=\left(\frac{1}{z}\right)^{k_n'+k_n''}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right),$$

gdzie

$$k'_n+k''_n+1>2.$$

Wskutek tego całka V wzięta wzdłuż każdego z kół, otaczających punkty osobliwe jest równa zeru. Pozostają więc do rozważenia tylko drogi Oe_i. Według równań (9) ... (13) mamy:

$$V^{oe_1}=V^{oe_1}$$

$$V_1^{e_1 o}=V^{e_1 o}+(p_1\gamma_1-q_1\alpha_1)j_1^{e_1 o}+(p_1\delta_1-q_1\beta_1)j_2^{e_1 o},$$

$$V_1^{oe_2}=V^{oe_2}+(p_1\gamma_1-q_1\alpha_1)j_1^{oe_2}+(p_1\delta_1-q_1\beta_1)j_2^{oe_2},$$

. . . .

$$V_{12\ldots k}^{e_k o}=V^{e_k o}+\sum_{i=k}^{i=1}(p_i c_{i\ldots k}-q_i a_{i\ldots k})j_1^{e_k o}+\sum_{i=k}^{i=1}(p_i d_{i\ldots k}-q_i b_{i\ldots k})j_2^{e_k o},$$

$$V_{12\ldots k}^{oe_{k+1}}=V^{oe_{k+1}}+\sum_{i=k}^{i=1}(p_i c_{i\ldots k}-q_i a_{i,\ldots k})j_1^{oe_{k+1}}+\sum_{i=k}^{i=1}(p_i d_{i\ldots k}-q_i b_{i\ldots k})j_2^{oe_{k+1}},$$

. . . .

$$V_{12\ldots n}^{e_n o}=V^{e_n o}.$$

Dodając te równości do siebie i pamiętając, że całka V wzięta wzdłuż całego toru C jest równa zeru, otrzymujemy związek:

$$0=\sum_{k=1}^{k=n-1}\left\{\sum_{i=k}^{i=1}(p_i c_{i\ldots k}-q_i a_{i\ldots k})(j_1^{e_k o}+j_1^{oe_{k+1}})+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=k}^{i=1}(p_i d_{i\ldots k}-q_i b_{i\ldots k})(j_2^{e_k o}+j_2^{oe_{k+1}})\right\}. \tag{14}$$

We wzorze tym nietrudno jest zastąpić całki określone $j_1^{oe_k}$, $j_2^{oe_k}$ przez stałe p i q. Jakoż, dla obiegu około punktu e_k mamy:

$$j_1(z)' = \alpha_k j_1(z) + \beta_k j_2(z) + p_k$$
$$j_2(z)' = \gamma_k j_1(z) + \delta_k j_2(z) + q_k.$$

Równościom tym czyni zadość jakakolwiek wartość zmiennej z. Podstawmy $z = e_k$; wówczas z uwagi, że

$$j_1'(e_k) = j_1(e_k) = j_1^{oe_k}; \quad j_2'(e_k) = j_2(e_k) = j_2^{oe_k},$$

mamy

$$-p_k = (\alpha_k - 1) j_1^{oe_k} + \beta_k j_2^{oe_k}$$
$$-q_k = \gamma_k j_1^{oe_k} + (\delta_k - 1) j_2^{oe_k},$$

skąd w razie, gdy wyznacznik

$$D_k = \begin{vmatrix} \alpha_k - 1 & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k - 1 \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

otrzymujemy

$$j_1^{oe_k} = \frac{\beta_k q_k - (\delta_k - 1) p_k}{D_k}$$

$$j_2^{oe_k} = \frac{\gamma_k p_k - (\alpha_k - 1) q_k}{D_k}.$$

Zastanowić się wypada, co oznacza równość zeru wyznacznika D_k.

Jeżeli każdy z jego elementów jest równy zeru, to $\alpha_k = 1$, $\beta_k = = \gamma_k = 0$, $\delta_k = 1$ t. j. podstawienie $A_k = 1$ jest identycznością, to znaczy, że punkt e_k nie jest punktem osobliwym.

Jeżeli jednak, wyłączywszy przypadek powyższy, pomimo tego jest

$$D_k = 0,$$

natenczas, porównywając to ostatnie równanie z równaniem (4) (§. 1.), widzimy, że $\rho_k' = \rho_k'' = 1$; a więc wykładniki k_k', k_k'' są wówczas liczbami całkowitemi. Lecz, jeżeli to ma miejsce, a nadto w rozwinięciach y_1, y_2 na szeregi, według warunku c), nie występują logarytmy, natenczas taki punkt e_k jest punktem zwyczajnym (mianowicie punktem zerowym) funkcyj j_1, j_2 i przy rozważaniu całki V na torze C można go pominąć.

Tak rozumiejąc punkty osobliwe równania (1), możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie: między stałemi p_i, q_i grupy G całek j_1, j_2, istnieje przy założeniach a), b), c), d) (§. 1.) związek dwuliniowy (14) lub związek:

$$0=\sum_{k=1}^{k=n-1}\left\{\left(\frac{\beta_k q_k-(\delta_k-1)p_k}{D_k}-\frac{\beta_{k+1} q_{k+1}-(\delta_{k+1}-1)p_{k+1}}{D_{k+1}}\right)\sum_{i=k}^{i=1}(p_i c_{i\ldots k}-q_i b_{i,\ldots k})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\gamma_k p_k-(\alpha_k-1)q_k}{D_k}-\frac{\gamma_{k+1} p_{k+1}-(\alpha_{k+1}-1)q_{k+1}}{D_{k+1}}\right)\sum_{i=k}^{i=1}(p_i d_{i\ldots k}-q_i b_{i\ldots k}),\right. \quad (14')$$

gdzie litery $\alpha\ldots$, $a\ldots$, p, q, D mają znaczenie powyżej podane.

§. 4.

Podobnie, jak wyżej wspomniane związki liniowe między stałemi p i q (§. 2.), mogą służyć związki (14) w pewnych przypadkach do zupełnego oznaczenia grupy G podstawień całek j_1, j_2.

Jako przykład zastosowania weźmiemy funkcye j_1, j_2 otrzymane na podstawie równania różniczkowego, należącego do kategoryi równań rozważanych w przytoczonej pracy „O całkach i t. d." (str. 283 i następne).

Pytamy się najprzód, czy istnieją wogóle równania owej kategoryi, czyniące równocześnie zadość warunkom naszym a), b), c), d) (§. 1).

Na str. 286-ej przytoczonej rozprawy mamy k_i', k_i'' określone przez równania (5*)[1])

$$k_i'=\frac{r_i+1}{l_i},\quad k_i''=\frac{r_i}{l_i}, \tag{15}$$

gdzie r_i, l_i są liczbami całkowitemi, obecnie wskutek warunku c) skończonemi. Wielkości te nadto czynią zadość związkowi (6*)

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{2r_i+1}{2l_i}-\frac{n}{2}=\text{liczba całkowita}, \tag{16}$$

gdzie n oznacza ilość wszystkich punktów osobliwych wraz z $e_n=\infty$.

Z równań (15) i z uwagi na warunek d) otrzymujemy równość:

$$k_i'+k_i''=\frac{2r_i+1}{l_i}=s_i, \tag{17}$$

gdzie s_i jest liczbą całkowitą.

Ponieważ według (17) jest $l_i s_i=2r_i+1$, więc l_i może być tu tylko liczbą nieparzystą. Mamy więc przed sobą kategoryę równań rozważanych pod (I) na str. 287 l. c. Wówczas zawsze się staje zadość warunkowi (16) i (17), gdyż np. wystarczy przyjąć:

$$2r_i+1=l_i.$$

---

[1]) Liczby z gwiazdką odnoszą się do rozprawy „O całkach i t. d."

To rozwiązanie jednak, w razie, gdy liczby l_i nie są względem siebie pierwsze, nie jest jedyne.

Zauważmy dalej, że według (17) równocześnie z l_i są także s_i liczbami nieparzystemi. Wskutek tego spółczynniki σ_i, wprowadzone l. c. na str. 292, które służyły przy określaniu grupy Γ, a które wyrażały się przez

$$(18) \qquad \sigma_i = e^{\frac{2r_i+1}{l_i}\pi i} = e^{s_i \pi i},$$

są wszystkie równe -1. Na podstawie więc uwagi, pomieszczonej w nocie §. 2-go niniejszej pracy wnosimy, że związki liniowe (21*) l. c. str. 297, między p, q (odnoszące się do podstawień eliptycznych) stają się tożsamościami, tak, iż dla oznaczenia stałych p i q grupy (G) pozostaje związek (20*) l. c. str. 297, i związek dwuliniowy (14).

Niech np. będzie dane równanie z trzema punktami osobliwymi e_1, e_2, e_3, z których $e_3 = \infty$ i dla których $l_1 = l_2 = l_3 = 3$. Ponieważ według równ. (2) jest

$$k_1' + k_1'' + k_2' + k_2'' + k_3' + k_3'' = 1,$$

więc, podstawiając tu wyrażenia (17), mieć będziemy:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1.$$

Temu związkowi stać się może w nieskończenie wiele sposobów zadość. Jeżeli, zgodnie z warunkami $a) \ldots . d)$, przyjmiemy $s_1 = -1$, $s_2 = -1$, $s_3 = 3$, otrzymamy

$$\begin{aligned} k_1' &= -\tfrac{1}{3} & k_1'' &= -\tfrac{2}{3} \\ k_2' &= -\tfrac{1}{3} & k_2'' &= -\tfrac{2}{3} \\ k_3' &= \tfrac{5}{3} & k_3'' &= \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

i równanie różniczkowe będzie miało kształt:

$$y'' + 2\left(\frac{1}{z-e_1} + \frac{1}{z-e_2}\right) y' + \frac{2}{9}\left(\frac{e_1-e_2}{z-e_1} + \frac{e_2-e_1}{z-e_2} + 10\right)\frac{y}{(z-e_1)(z-e_2)} = 0.$$

Badając funkcyę

$$\eta(z) = \frac{y_1(z)}{y_2(z)}$$

np. przy pomocy odtworzenia płaszczyzny z na płaszczynę η, łatwo przyjść można do wniosku, że funkcya η jest całką eliptyczną

$$\eta(z) = \int^z \frac{dz}{\sqrt[3]{(z-e_1)^2(z-e_2)^2}}.$$

Stąd się znów okazuje, że podstawienia, którym η ulega przy obiegu punktów osobliwych e_1, e_2, ∞ mają kształt:

$$\eta' = \alpha\eta + \beta.$$

Ponieważ funkcya $\left(\frac{d\eta}{dz}\right)$ przy owych obiegach przyjmuje wartości:

$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)' = \rho \left(\frac{d\eta}{dz}\right),$$

gdzie $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ jest pierwiastkiem pierwotnym jedności, więc, jeżeli jeszcze przyjmiemy, iż dolny kraniec całki $\eta\ (z)$ jest ∞, mieć będziemy podstawienia funkcyi η:

przy obiegu około $e_3 = \infty$: $\eta' = \rho\eta$,

" " " e_1 $\eta' = \rho\eta + \beta_1$,

" " " e_2 $\eta' = \rho\eta + \beta_2$.

Lecz obieg kolejno około e_3, e_1, e_2 prowadzi do tożsamości, skąd wynika, iż

$$\rho\beta_2 + \beta_1 = 0.$$

Mnożąc nakoniec η przez czynnik $\frac{1}{\beta_2}$, mieć będziemy podstawienia „rodzące“ grupy funkcyi $\eta\ (z)$:

około $z = \infty$ $\eta' = \rho\eta$,

" $z = e_1$ $\eta' = \rho\eta - \rho$,

" $z = e_2$ $\eta' = \rho\eta + 1$,

Znając wyrażenie analityczne funkcyi $\eta\ (z)$ i jej podstawienia rodzące, łatwo jest znaleźć wyrażenia analityczne i podstawienia rodzące funkcyj y_1, y_2. Mianowicie, według §. 1. (roz. II. cyt. rozprawy) mamy:

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{(z-e_1)^2 (z-e_2)^2}} \int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt[3]{(z-e_1)^2 (z-e_2)^2}}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{(z-e_1)^2 (z-e_2)^2}},$$

zaś według §. 2-go (tamże) mamy jako podstawienia odpowiadające obiegowi około:

$$e_3 = \infty \ \dots \ A_3) \begin{cases} y_1' = \sigma_3 e^{\frac{\pi i}{3}} y_1 \\ y_1' = \sigma_3 e^{\frac{-\pi i}{3}} y_2, \end{cases}$$

$$e_1 \ \dots\dots \ A_1) \begin{cases} y_1' = \sigma_1 \left(e^{\frac{\pi i}{3}} y_1 - e^{\frac{\pi i}{3}} y_2 \right) \\ y_2' = \sigma_1 e^{\frac{-\pi i}{3}} y_2, \end{cases}$$

$$e_2 \ \dots\dots \ A_2) \begin{cases} y_1' = \sigma_2 \left(e^{\frac{\pi i}{3}} y_1 + e^{-\frac{\pi i}{3}} y_2 \right) \\ y_2' = \sigma_2 e^{-\frac{\pi i}{3}} y_2, \end{cases}$$

czyli z uwagi, że według (18) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = e^{\pi i}$

$$A_3) \begin{cases} y_1' = \rho^2 y_1 \\ y_2' = \rho y_2 \end{cases}, \quad A_1) \begin{cases} y_1' = \rho^2 y_1 - \rho^2 y_2 \\ y_2' = \rho y^2 \end{cases}, \quad A_2) \begin{cases} y_1' = \rho^2 y_1 + \rho y_2 \\ y_2' = \rho y_2 \end{cases},$$

gdzie $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Z kolei przejdźmy do funkcyj j_1, j_2. Ich podstawienia rodzące są:

$$A_3) \begin{cases} j_1' = \rho^2 j_1 + p_3 \\ j_2' = \rho j_2 + q_3 \end{cases} \qquad A_1) \begin{cases} j_1' = \rho^2 j_1 - \rho^2 j_2 + p_1 \\ j_2' = \rho j_2 + q_1 \end{cases}$$

$$A_2) \begin{cases} j_1' = \rho^2 j_1 + \rho j_2 + p_2 \\ j_2' = \rho j_2 + q_2. \end{cases}$$

Przyjmijmy dla uproszczenia, że także w całkach j_1, j_2 krańce dolne są równe ∞. Wówczas:

$$p_3 = q_3 = 0.$$

Między pozostałemi stałemi p, q istnieją związki (20*):

$$p_2 - q_2 + \rho p_1 = 0$$
$$\rho q_2 + q_1 = 0,$$

z których można wyrazić p_2, q_2 przez p_1, q_1:

$$p_2 = -\rho^2 q_1 - \rho p_1$$
$$q_2 = -\rho^2 q_1,$$

i związek (14):

$$0 = -q_1 \rho [\rho^2 q_1 + \rho q_2 + (\rho - 1)(p_1 - p_2)] + (p_1 + q_1 \rho)(\rho^2 - 1)(q_1 - q_2),$$

który po podstawieniu za p_2, q_2 powyższych wyrażeń redukuje się do:

$$q_1 (2 p_1 + \rho q_1) = 0,$$

skąd, z uwagi iż $q_1 \gtrless 0$, mamy

$$q_1 = -2\rho^2 p_1.$$

Tym sposobem można wszystkie stałe q_1, p_2, q_2 wyrazić przez p_1. Mnożąc $j_{1,2}$ przez stałą $\frac{1}{p_1}$, co zawsze jeszcze zrobić możemy, czyli, co na jedno wychodzi, przyjmując $p_1 = 1$, otrzymamy podstawienia rodzące, a więc i grupę G zupełnie określoną:

$$A_1)\begin{cases} j_1' = \rho^2 j_1 - \rho^2 j_2 + 1 \\ j_2' = \rho j_2 - 2\rho^2 \end{cases}, \qquad A_2)\begin{cases} j_1' = \rho^2 j_1 + \rho j_2 + \rho \\ j_2' = \rho j_2 + 2\rho \end{cases},$$

$$A_3)\begin{cases} j_1' = \rho^2 j_1 \\ j_2' = \rho j_2 \end{cases},$$

c. b. d. o.

§. 5.

Jako drugi przykład weźmiemy równanie różniczkowe:

$$y'' + 2\frac{2z-1}{z.(z-1)}y' + \frac{3-35z+35z^2}{16.z^2(z-1)^2}y = 0,$$

nienależące do kategoryi równań rozważanych w poprzedzającym ustępie, a więc, którego rozwiązania y_1, y_2 nie są funkcyami jednowartościowemi argumentu $\eta = \frac{y_1}{y_2}$. Punktami osobliwymi tego równania są punkty: $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, $e_3 = \infty$, w których wykładniki k mają następujące wartości:

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 \quad k_1' = -\tfrac{1}{4}, \quad k_1'' = -\tfrac{3}{4} \\ e_1 &= 0 \quad k_2' = -\tfrac{1}{4}, \quad k_2'' = -\tfrac{3}{4} \\ e_3 &= \infty \quad k_2' = \tfrac{7}{4}, \quad k_3'' = \tfrac{5}{4}. \end{aligned}$$

Czynią one widocznie zadość wszystkim warunkom a) . . . d) (§. 1).

Postępując podobnie, jak w ustępie poprzedzającym, znajdziemy podstawienia rodzące grupy Γ, odpowiadające obiegom zmiennej z około e_1, e_2, e_3, w kształcie:

$$A_1)\; \begin{matrix} y_1' = -i\,y_1 \\ y_2' = i\,y_2 \end{matrix}, \qquad A_2)\; \begin{matrix} y_1' = i\,y_2 \\ y_2' = i\,y_1 \end{matrix}, \qquad A_3)\; \begin{matrix} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{matrix}.$$

Jeżeli znowu dla uproszczenia przyjmiemy, iż dolny kraniec całek $j_i = \int y_i\,dz$ $(i = 1, 2)$ jest $z = \infty$, to z uwagi, iż wówczas $p_3 = q_3 = 0$, mamy jako podstawienia rodzące grupy G:

$$A_1)\begin{cases} j_1' = -i j_1 + p_1 \\ j_2' = i\,j_2 + q_1 \end{cases}, \qquad A_2)\begin{cases} j_1' = i\,j_2 + p_2 \\ j_2' = i\,j_1 + q_2 \end{cases}, \qquad A_3)\begin{cases} j_1' = -j_2 \\ j_2' = j_1 \end{cases}.$$

Między p_1 i p_2, q_1 i q_2 istnieją związki liniowe odpowiadające związkom (20*), mianowicie:

$$(19)\qquad \begin{aligned} p_1 - i\,p_2 &= 0 \\ q_1 + i\,q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Związek (14) redukuje się tu do równania:

$$(20)\qquad q_1\,j_1^{1,0} + p_1 j_2^{1,0} = 0,$$

czyli, ponieważ

$$(21)\qquad \left\{ \begin{aligned} j_1^{1,\infty} &= \frac{i-1}{2}\,p_1, & j_2^{1,\infty} &= -\frac{i+1}{2}\,q_1 \\ j_1^{\infty,0} &= \frac{i\,q_2 + p_2}{2}, & j_2^{\infty,0} &= \frac{i\,p_2 + q_2}{2}, \end{aligned} \right.$$

a według (19) $p_2 = -i\,p_1$, $q_2 = i\,q_1$, redukuje się do równania

$$(20')\qquad q_1^2 + 2p_1\,q_1 - p_1^2 = 0.$$

Przyjmując $p_1 = 1$, co, jak wiadomo, zawsze zrobić można, mieć będziemy podstawienia rodzące A_i), a więc i grupę G zupełnie oznaczoną.

W przykładzie tym na jedno jeszcze chcielibyśmy zwrócić uwagę. Ponieważ suma różnic $k_i' - k_i'' = \frac{1}{l_i}$:

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 1,$$

więc równanie różniczkowe posiada same rozwiązania algebraiczne[1]). Są to funkcye

$$y_1 = \frac{\sqrt{1-\sqrt{z}}}{[z(z-1)]^{\frac{3}{4}}}, \quad y_2 = \frac{\sqrt{1+\sqrt{z}}}{[z(z-1)]^{\frac{3}{4}}},$$

czyniące zadość, jak się łatwo można przekonać, równaniu algebraicznemu stopnia 8-go i „rodzaju“ $p = 2$. Do takiego równania można zawsze skonstruować dwie całki Abelowe gatunku I, liniowo od siebie niezależne. Temi właśnie całkami są nasze funkcye j_1, j_2. Wskutek tego z góry już można było przewidzieć, że między peryodami tychże całek istnieje związek dwuliniowy. Nadto jednak, ponieważ wyznacznik podstawień grupy Γ jest równy jedności, związek ten różni się tylko

---

[1]) por. Vorl. über Modulfunctionen von Klein-Fricke, str. 103.

czynnikiem stałym od związku (20). Okazuje się to z porównania drogi przez nas użytej z drogą, której używali l. c. Briot i Bouquet.

Sprawdzić zaś to możemy jeszcze w inny sposób.

Wprowadźmy w (20) zamiast p_1 i q_1 ich wyrażenia przez całki określone (21). Otrzymamy związek:

$$(j_1^{1,0} j_2^{\infty,1} - j_2^{1,0} j_1^{\infty,1}) + i(j_1^{1,0} j_2^{\infty,1} + j_2^{1,0} j_1^{\infty,1}) = 0.$$

Toż samo równanie otrzymamy inną drogą.

Zamiast zmiennej z wprowadźmy jako zmienną niezależną wspomnianą funkcyę η:

$$\eta = \frac{y_1}{y_2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}},$$

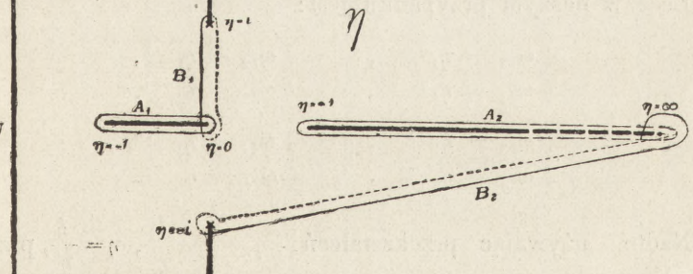
skąd

$$z = \left(\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}\right)^2.$$

Geometrycznie, według teoryi Riemanna, znaczy to, iż ośmiolisciową powierzchnię Riemanna, charakteryzującą powyższe równanie stopnia 8-go, rodzaju $p=2$, odtwarzamy na płaszczyznę zmiennej η. Na tej płaszczyźnie otrzymamy znowu powierzchnię Riemanna, ale tylko dwuliściową, której punktami rozgałęzienia będą punkty, odpowiadające punktom osobliwym e_i, t. j.

$\eta = 0, \infty$ odpowiadające $e_1 = 1$
$\eta = +1, -1$ » $e_2 = 0$
$\eta = i, -i$ „ $e_3 = \infty$.

Fig. 3.



Będzie więc to znowu powierzchnia rodzaju $p=2$ (fig. 3), jak być powinno. Przy tem przekształceniu przechodzą całki Abelowe gatunku I znowu w całki Abelowe tegoż samego gatunku:

$$j_1=\int y_1\, dz= -4\sqrt{i}\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta^2)(1+\eta^2)}} = -4\sqrt{i}\,\eta_1$$

$$j_2=\int y_2\, dz= +4\sqrt{i}\int \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta^2)(1+\eta^2)}} = +4\sqrt{i}\,\eta_2$$

Na powierzchni Riemanna η jako dwuliściowej łatwo nam określić układ torów zamkniętych, odpowiadających peryodom całek, tak zwany „układ torów kanoniczny".

Jako linie „przejścia" (z jednego liścia na drugi) obierzmy linie: $-1\sim 0$; $1\sim\infty$; $i\sim N\sim -i$. Wówczas układ ów kanoniczny stanowić będą np. tory: A_1, B_1, A_2, B_2 (na figurze części kropkowane torów B_1, B_2 znajdują się na drugim liściu leżącym pod pierwszym).

Nazwijmy peryody całek η_1, η_2 odpowiadające tym torom:

	A_1	A_2	B_1	B_2
η_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
η_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

Wówczas, jak wiadomo, między wielkościami ω_{ik} istnieje związek w formie „kanonicznej"

(23) $$(\omega_{11}\,\omega_{23}-\omega_{21}\,\omega_{13})+(\omega_{12}\,\omega_{24}-\omega_{22}\,\omega_{14})=0.$$

Lecz w naszym przypadku jest:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega_{11}=\eta_1^{\,0,\,-1},\qquad \tfrac{1}{2}\,\omega_{12}=\eta_1^{\,\infty,\,1},$$
$$\tfrac{1}{2}\,\omega_{21}=\eta_2^{\,0,\,-1},\qquad \tfrac{1}{2}\,\omega_{22}=\eta_2^{\,\infty,\,1},$$

$$\tfrac{1}{2}\,\omega_{13}=\eta_1^{\,i,\,0},\qquad \tfrac{1}{2}\,\omega_{14}=\eta_1^{\,-i,\,\infty},$$
$$\tfrac{1}{2}\,\omega_{23}=\eta_2^{\,i,\,0},\qquad \tfrac{1}{2}\,\omega_{24}=\eta_2^{\,-i,\,\infty}.$$

Nadto, używając przekształceń: $\eta=-\frac{1}{\eta'}$, $\eta=\frac{1}{\eta'}$, przekonamy się, że:

$$\begin{matrix} \eta_1^{\infty,1} = \eta_2^{0,-1} \\ \eta_2^{\infty,1} = -\eta_1^{0,-1} \end{matrix}, \quad \text{zaś} \quad \begin{matrix} \eta_1^{-i,\infty} = i\,\eta_2^{i,0} \\ \eta_2^{-i,\infty} = i\,\eta_1^{i,0}. \end{matrix}$$

Uwzględniając te równości, otrzymamy z (23) równanie:

$$(\eta_1^{0,-1}\eta_2^{i,0} - \eta_2^{0,-1}\eta_1^{i,0}) + i(\eta_1^{0,-1}\eta_2^{i,0} + \eta_2^{0,-1}\eta_1^{i,0}) = 0. \quad (24)$$

zgodne z równaniem (23).